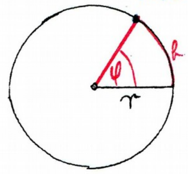
III. Die gleichförmige Kreisbewegung

Zum Bogenmaß

In der Physik ist der Winkel als Verhältnis zweier Längen definiert :

$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}$$

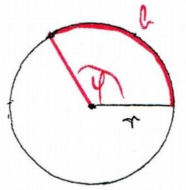


$b = r$

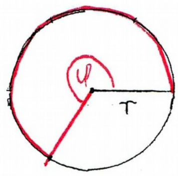
Bogenmaß des Winkels φ : $\varphi = \frac{b}{r} = \frac{r}{r} = 1 = 1 \text{ radiant}$

1 radiant ist der Winkel, für den die Bogenlänge gleich dem Radius ist.

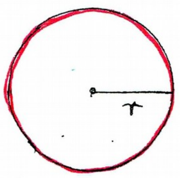
φ ist zunächst eine unbenannte Zahl ; um sie als Winkel auszuweisen und vom Gradmaß zu unterscheiden, kann man als Einheit rad (radiant) hinzuschreiben.



Drehwinkel $\varphi = \frac{b}{r} = \frac{2 \cdot r}{r} = 2 (\text{rad})$



Drehwinkel $\varphi = \frac{b}{r} = \frac{4r}{r} = 4 (\text{rad})$



Drehwinkel $\varphi = \frac{b}{r} = \frac{2r\pi}{r} = 2\pi (\text{rad})$

$\varphi = 2\pi$

Gradmaß ≙	Bogenmaß
360°	2π
180°	1π
90°	$\pi/2$

$1 \text{ rad} \mathrel{\hat{=}} \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3°$ (unabhängig vom Kreisradius)

$1° \mathrel{\hat{=}} 0{,}01745 (\text{rad})$

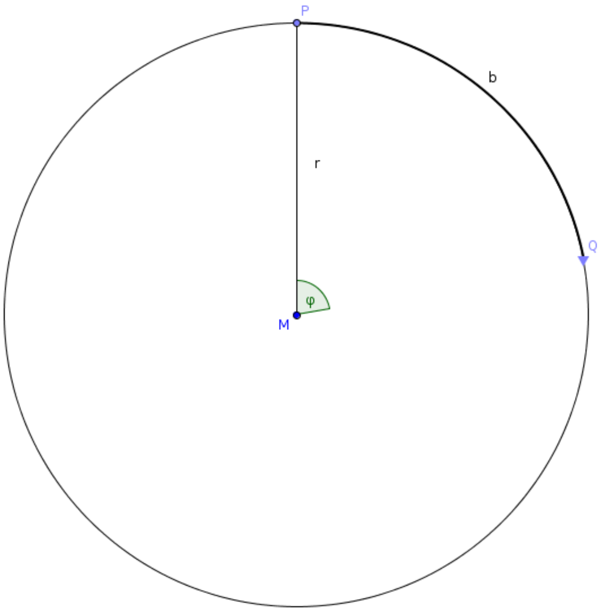
1. Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

Dreht sich ein fester Körper um eine Achse, so beschreibt jeder Massenpunk des Körpers eine Kreisbahn.
Die Umlaufwege der Massenpunke sind umso größer je weiter sie von der Drehachse gelegen sind.
Die Zeit für einer vollen Umlauf heißt Umlaufdauer T.
Die Anzahl der Umläufe pro Sekunde nennt man Drehzahl oder Frequenz f:

$\boxed{f=\frac{n}{t}}$ bzw. $\boxed{f=\frac{1}{T}}$ [f] = 1 1/s = 1 Herz = **1Hz**

2. Die Winkelgeschwindigkeit

Der Fahrstral $\overline{MP}$ überstreicht im gleichen Zeitabschnit Δt gleiche drehwinkel φ



Bogenmaß des Winkels φ:

$$\varphi=\frac{b}{r}\ rad$$

⇒ $b=r*\varphi$

Während der Zeit T wird der Bogen b = 2π r durchlaufen.

Verhältnis Teildrehung zu ganzem Umlauf:

$$\frac{b}{2\pi r}=\frac{r*\varphi}{2\pi r}=\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{t}{T}$$

$$\varphi=\frac{2\pi}{T}*t$$

In $t=T$ wird der Winkel 2 π überstrichen.
In $t=1s$ wird der Winkel $\frac{2\pi}{T}$ überstrichen.
⇒ Definiton **Winkelgeschwindigkeit ω** („Omega"):

„ω ist der vom Fahrstral überstrichen Winkel, dividiert durch die dazu benötigte Zeit"

$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}}$ $\boxed{\omega=2\pi*f}$

alg.: $\omega=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

[ω] = 1/s

3. Die Bahngeschwindigkeit

Der Zurückgelegte Weg s eines Massenpunktes ist der Bogen b

(1) $b=S=r*\varphi$

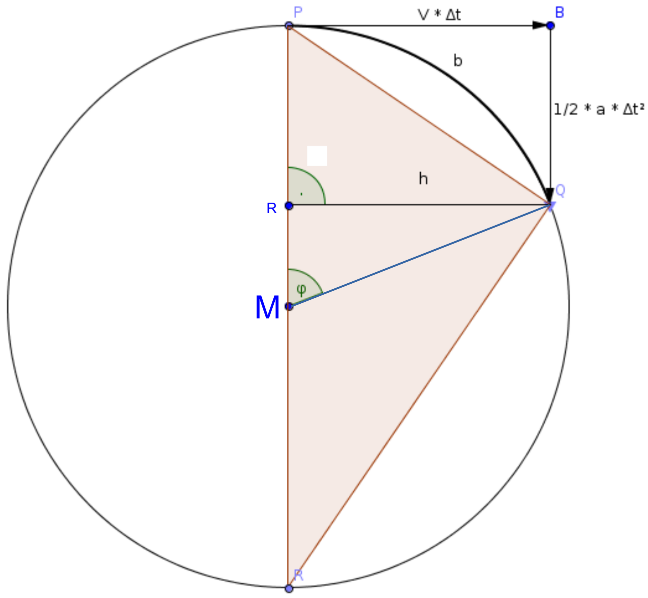
(2) $\varphi=\frac{2\pi}{T}*t=\omega*t$

(3) $V=\frac{S}{t}$

(1) und (2) in (3): $V=\frac{r*\varphi}{t}=\frac{r*\omega*t}{t}=r*\omega$

$$\boxed{V=r*\omega=\frac{r*2\pi}{T}}$$

4. Die Zentralbeschleunigung



* ohne Einfluss eines 2. Vektors würde sich P mit v = Konstant bewegen und in der Zet Δ t den Weg $\overline{PS}$ zurücklegen.

* Infolge eines Beschleunigungsvektors „durchfällt" der Massenpunkt die Strecke $\overline{SQ}=\frac{1}{2}*a*\Delta t^2$

* Der Massenpunk gelangt nach Q; Q liegt auf dem Kreis; → PQR ist ein rechtwinkliges Dreieck

* Im rechtwinklig Dreieck gilt der Hähensatz:

„Das Produkt aus den Hypothenusen-abschnitten ist gleich den Quadrat der Höhe."

$$\overline{PH}*\overline{HR}=\overline{HQ}^2=\overline{PS}^2$$

$$\frac{1}{2}*a*\Delta t^2(2r-\frac{1}{2}*a*\Delta t^2)=(V*\Delta t)^2$$

$$a*r-\frac{1}{4}a^2*\Delta t=V^2$$

für sehr kleine Δt ist das Glied mit Δt² vernachlässigbar klein, so das gilt:

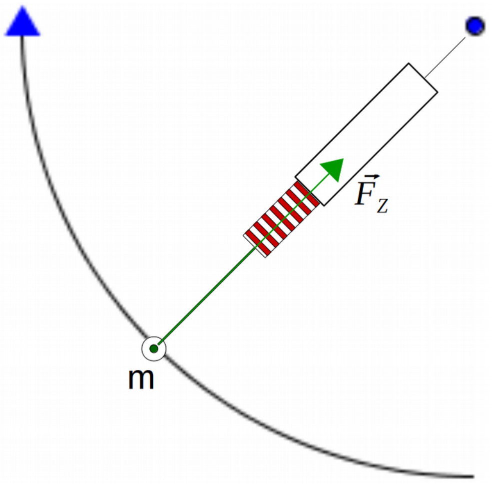
$a*r=V^2$ bzw $a=V\frac{2}{r}$ Radialbeschleunigung

mit konstant $v=\omega*r$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_Z=r*\omega^2}$ Bahngeschwindigkeit

Merke:

Die glechförmige Kreisbewegung ist beschleunigt, die Richtung des Beschleunigungsvektors zeigt immer zum Kreismittelpunkt hin ($a_Z=-\omega^2*\vec{r}$).
Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors bleibt Konstant seine Richtung ändert sich aber Ständig.

5. Die Zentralkraft



Damit ein Körper auf einer Kreisbahn umläuft, muss man ihn mit einer Krauft der Zentralkraft $\vec{F}_Z$ auf der Bahn halten.
Diese weist zum centrum hin.

$$F=m*a \quad \text{mit} \;\; a=a_Z=\frac{V^2}{r}=r*\omega^2$$

=> $\boxed{F_Z=\frac{m*V^2}{r}}$ bzw. $\boxed{F_Z=m*r*\omega^2}$

($\vec{F}_Z m*\vec{a}_Z$)

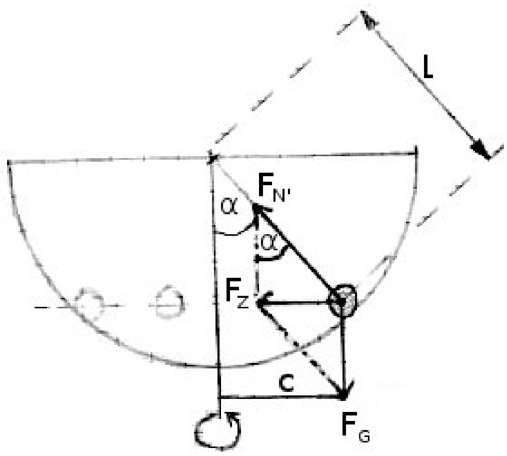
Zur Zentrifugalkraft:

Die Zentrifugalkraft is der aus die Trägheit resultierende Kraft, die die Richtungsändeerung derwe. Sie weist fom Kreismittelpunkt weg und wird nur voneinem mitrotierenden Beobachter registriert.

Beispiele zur Kreisbewegung

a) Erdabplattung on den Polen
b) Zentrifuge
c) Rotationsparaboloid
d) Rinne in Halbkreisform mit Kugel

Gesucht wird eine Funktion für α, in der nur f als abhängige Göße vorkommt.



$$\tan(\alpha)=\frac{F_Z}{F_g}=\frac{m*r*\omega^2}{m*g}=\frac{r*4\pi^2*f^2}{g} \quad \text{mit} \;\; r=l*\sin(\alpha)$$

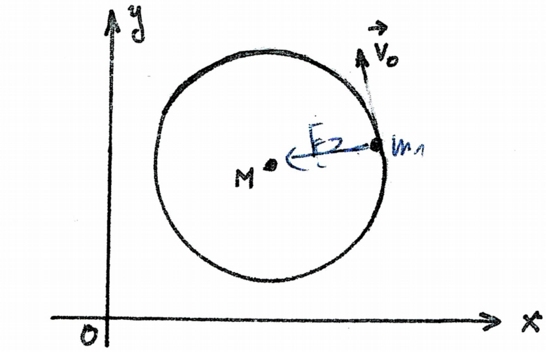
$$\tan(\alpha)=\frac{l*\sin(\alpha)*4\pi^2*f^2}{g}$$

$$\text{mit} \;\; \sin\frac{(\alpha)}{\cos}(\alpha)=tang(\alpha) bzw \sin\frac{(\alpha)}{\tan}(\alpha)=\cos(\alpha)$$

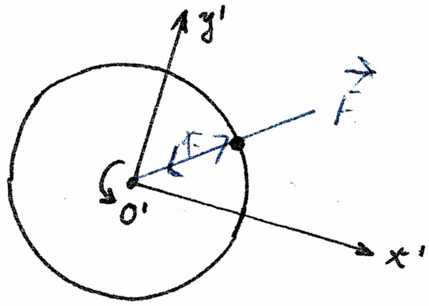
=> $\cos(\alpha)=\frac{g}{l*4\pi^2*f^2}$

6. Kräfte bei der gleichmäßigen Kreisbewegung

a) "ruhender Beobachter"

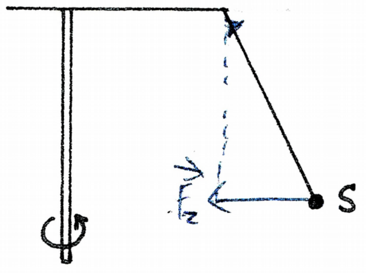


"mitbewegter Beobachter"

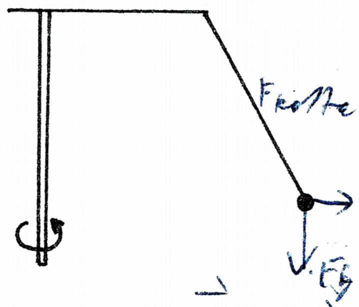


Zentrifugalkraft = Trägheitskraft
F = Gleichgewicht

b) Kettenkarussel

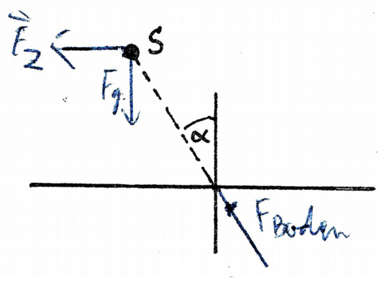


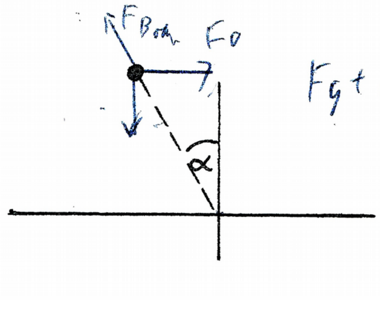
$F = F_g + F_{Kette}$



$\vec{F}_{Kette} + \vec{F}_g + \vec{F}' = \vec{0}$

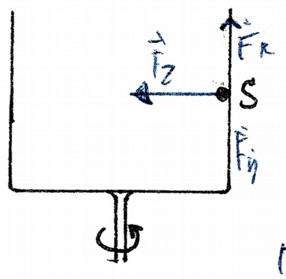
c) Radfahrer in Linkskurve



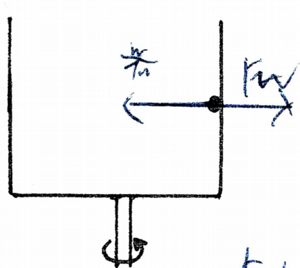


$F_g + F_{Boden} + F' = \vec{0}$

d) Rotor



$F_Z = F_N'$



$F_N' + F' = 0$