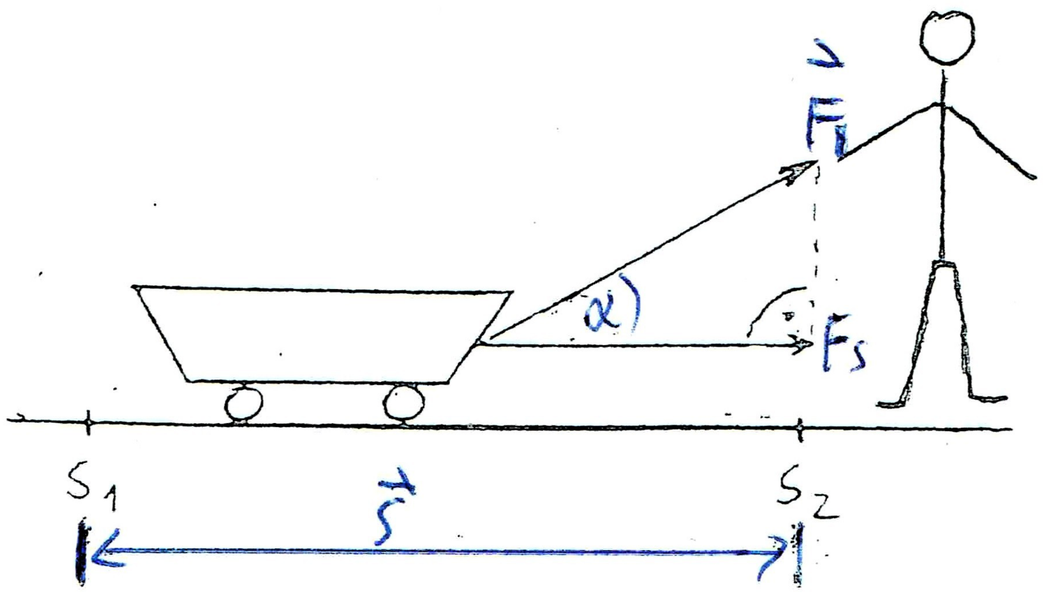
IV. Arbeit und Energie

1. Die Arbeit

Arbeit wird immer dann verrichtet, wenn eine Kraft längs eines Weges wirkt.



F_s = Kraftkomponente in Wegrichtung

$F_s = F \cdot \cos(\alpha)$

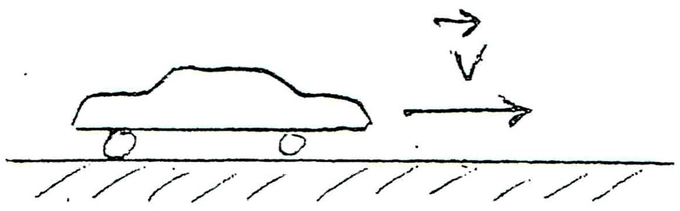
Definition: Wirkt längs eines Weges $\vec{s}$ die konstante Kraft $\vec{F}_s$, so versteht man unter der Arbeit W, die diese Kraft verrichtet, das Produkt aus $\vec{F}_s$ und $\vec{s}$.

$$\boxed{W = \vec{F}_s \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)}$$

(Skalarprodukt)

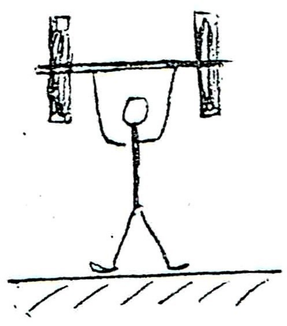
Einheit: [W] = $1\,N \cdot m = 1$ Joule $= 1\,J$

Spezialfälle : 1. Ein Wagen bewegt sich reibungsfrei mit v = konst.



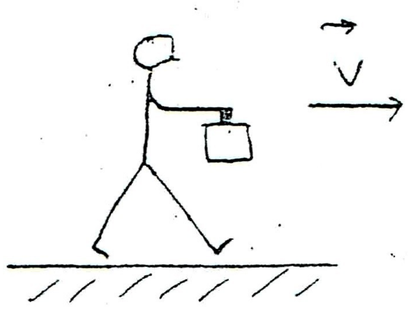
F = 0 $\Rightarrow$ W = 0

2. Gewichtheber :



s = 0 $\Rightarrow$ W = 0

3. Tragen einer Last :

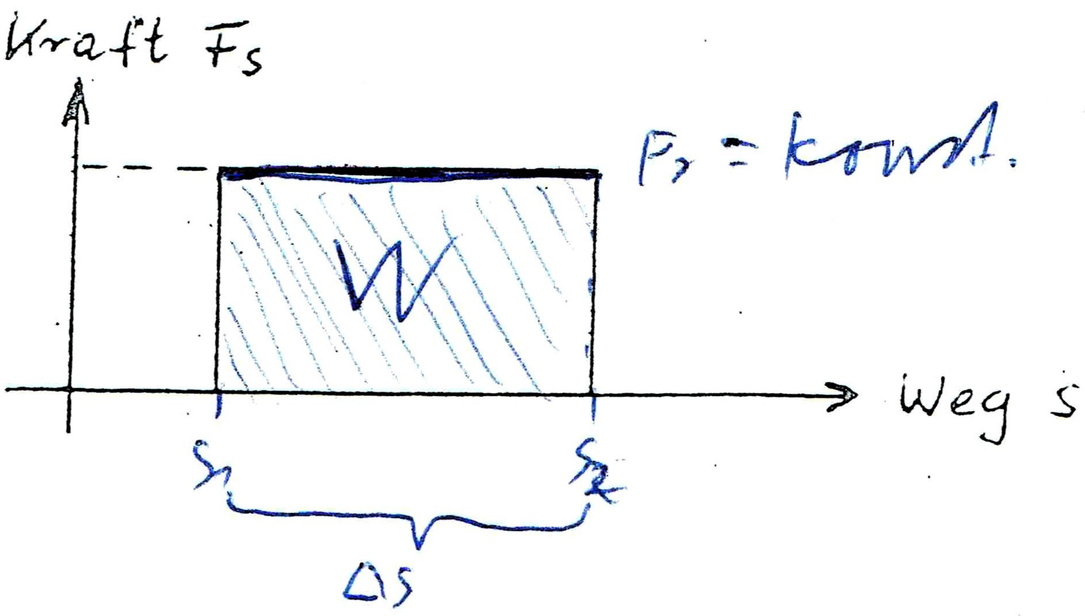


$F \perp s$ $\Rightarrow$ W = 0

Senkrecht

$\cos(90°) = 0$

Geometrische Darstellung der Arbeit



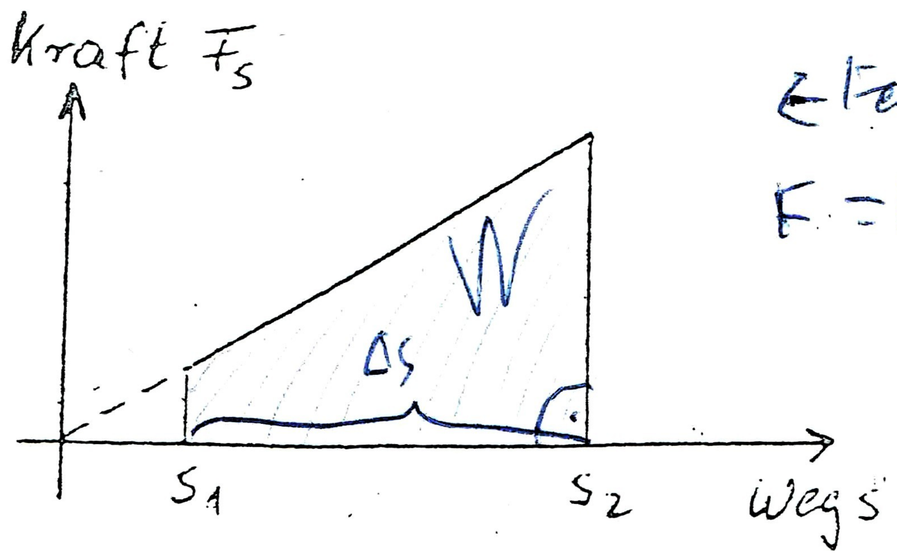
$W = F_s \cdot \Delta s = F_s \cdot (s_2 - s_1)$

$s = 0 \Rightarrow W = 0$
$t = 0 \Rightarrow W = 0$
$\alpha = 90° \Rightarrow W = 0$

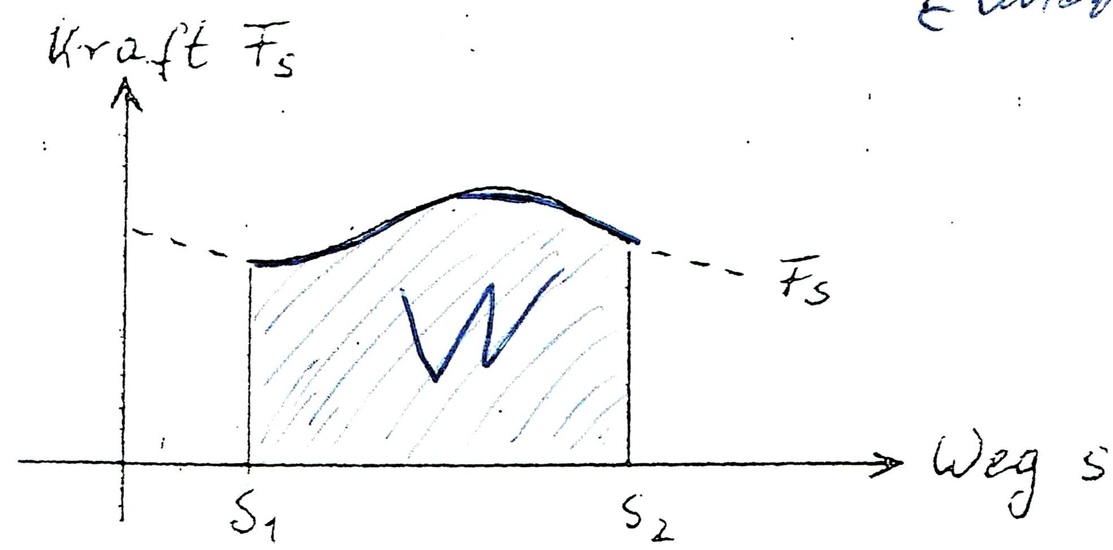
Auch für veränderliche Kräfte erhält man die Arbeit als Fläche unter der Weg-Kraft-Kurve.

← Feder

$F = D \cdot s$



← integriert



<u>Allgemeine Definition der Arbeit</u>

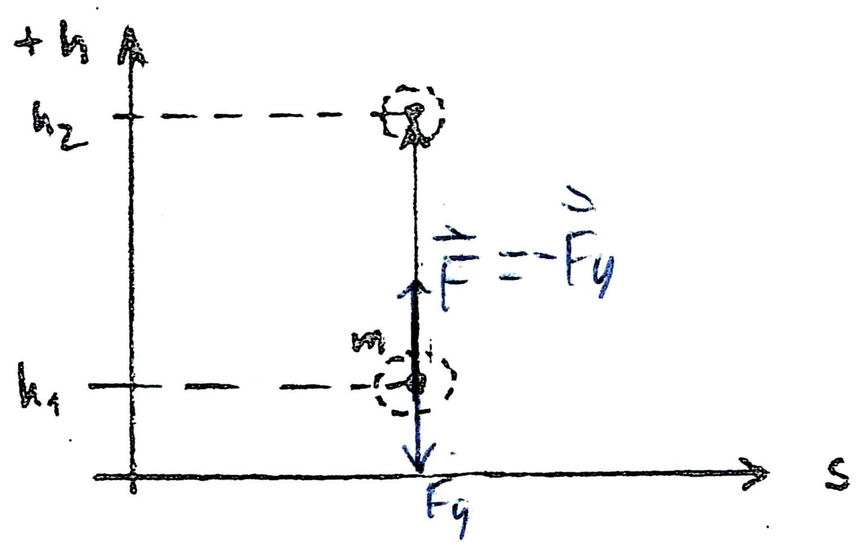
Die durch eine Kraft $\vec{F}_s$ längs eines Weges $\vec{s}$ verrichtete Arbeit ist gleich der Fläche, die durch die Wegachse, Kraftkurve und die Parallelen zur Kraftachse durch Anfangs- und Endpunkt des Weges begrenzt wird. Kurz: Die Arbeit ist gleich der Fläche unter der Weg-Kraft-Kurve.

<u>Beispiele:</u>

<u>1. Hubarbeit in Erdnähe</u>

Ein auf der Erdoberfläche befindlicher Körper der Masse m soll (mit konstanter Geschwindigkeit) um die Höhe h gehoben werden.

a. senkrecht nach oben



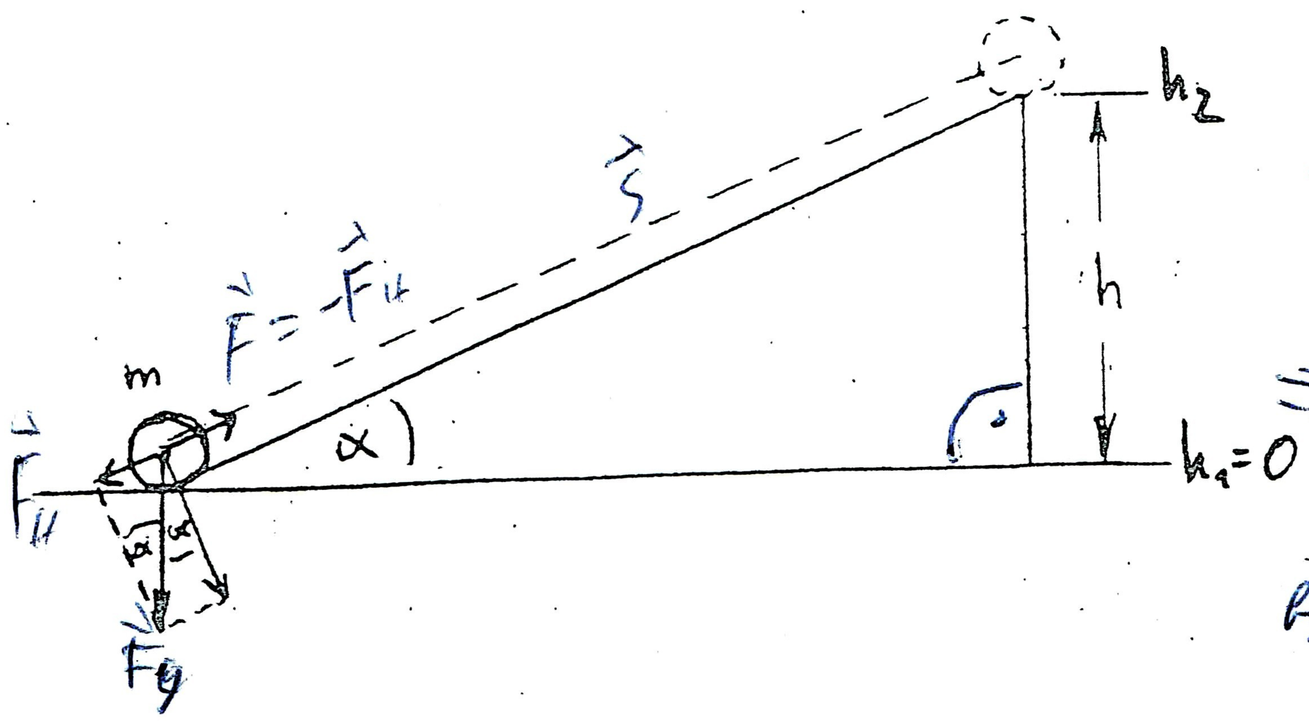
$W_{Hub} = F \cdot s$ $\quad (\cos \alpha^* = 1)$

$= F_g \cdot \Delta h$ $\quad \alpha = 0°$

$= F_g \cdot (h_2 - h_1)$

$W_{Hub} = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$ $\quad \boxed{W_{Hub} = m \cdot g \cdot \Delta h}$

b. entlang einer schiefen Ebene (reibungsfrei)



$F_H = F_g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

$W = F \cdot s = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot s$

mit $\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$

$\Rightarrow W = m \cdot g \cdot \frac{h}{s} \cdot s$

$W = m \cdot g \cdot h$

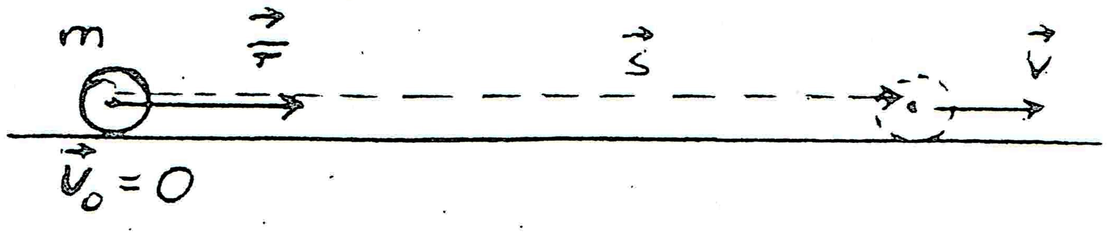
bzw: $W = m \cdot g \cdot \Delta h$

Die Hubarbeit in Erdnähe ist unabhängig vom Weg ; sie hängt von der Höhendifferenz h und der Masse des Körpers ab.

Es gilt : $\boxed{W_{Hub} = m \cdot g \cdot \Delta h}$

2. Beschleunigungsarbeit

Ein Körper der Masse m soll auf gerader, reibungsfreier Strecke aus dem Stand gleichmäßig auf die Geschwindigkeit $\vec{v}$ beschleunigt werden.



$$W = F \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a \cdot t)^2$$

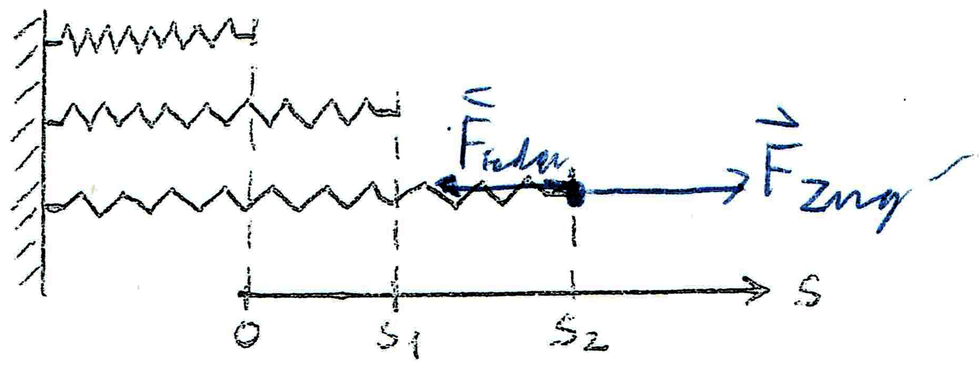
$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Die Beschleunigungsarbeit ist unabhängig von der Art der Beschleunigung; sie hängt nur von Anfangsgeschwindigkeit v_1, Endgeschwindigkeit v_2 und der Masse m des Körpers ab.

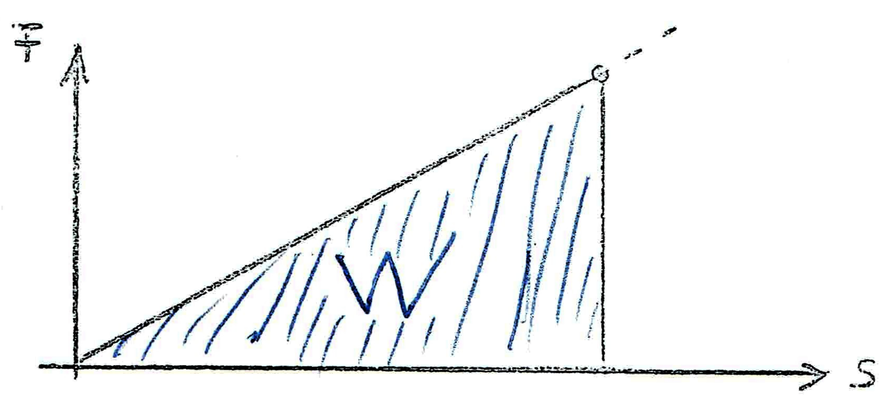
$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}$$

3. Spannarbeit

Eine Schraubenfeder mit Federkonstante D soll um die Strecke $\vec{s}$ aus der Ruhelage ausgelenkt werden.



Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die aufzuwendende Kraft $\vec{F}$ proportional zur Auslenkung $\vec{s}$: $F = D \cdot s$



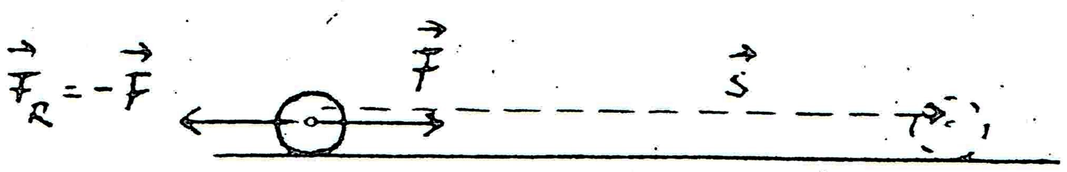
$$W_{Spann} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot D \cdot s = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$$

Die Spannarbeit, die erforderlich ist, um eine Schraubenfeder der Federkonstante D aus der Ruhelage um die Strecke s auszulenken, beträgt :

allg.: $\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (s_2^2 - s_1^2)}$

4. Reibungsarbeit

Ein Körper soll auf gerader Straße gegen die Reibungskraft $\vec{F}_R$ mit konstanter Geschwindigkeit um die Strecke $\vec{s}$ fortbewegt werden.



Die dabei verrichtete Reibungsarbeit beträgt : $\boxed{W = F_R \cdot s}$

5. Verformungsarbeit

Die verformende Kraft wächst mit der Verformung, ist also nicht konstant. Die Arbeit kann deshalb nicht unmittelbar berechnet werden.

2. Die Leistung

Definition : Ist die Arbeit ΔW der zu ihrer Verrichtung aufgewendeten Zeit Δt proportional, so versteht man unter der **Leistung P** den Quotienten aus ΔW und Δt .

$$\boxed{P = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

Einheit : [P] = $1 \cdot \frac{J}{s} = 1\,Watt = W$

Ist diese Proportionalität nicht gegeben, so versteht man unter der mittleren Leistung $\bar{P}$ im Zeitintervall Δt den Quotienten $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

und unter der Momentanleistung P den Grenzwert von $\bar{P}$ für $\Delta t \to 0$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

Für die Momentanleistung einer Kraft $\vec{F}$ gilt :

$$P = \lim \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim \frac{F_s \cdot \Delta s}{\Delta t} = F_s \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_s \cdot \frac{ds}{dt} = F_s \cdot \dot{s} = F_s \cdot v$$

3. Energie und Energieerhaltung

Definition : Unter der Energie eines Körpers oder eines Systems versteht man seine Fähigkeit, Arbeit zu verrichten (sein Arbeitsvermögen). Formelzeichen : E ; Einheit : J .

Beispiel :
Eine Kugel, an der durch Anschieben Beschleunigungsarbeit von der Größe ½ m v^2 verrichtet wurde, ist ihrerseits in der Lage, Arbeit zu verrichten, z.B. Beschleunigungsarbeit an einer zweiten Kugel; diese hat nach dem Anschieben die Energie ½ m v^2 .
Die Größe Energie ist Zuständen zugeordnet (ein Körper oder ein System hat Energie), die Größe Arbeit ist Prozessen zugeordnet (ein Körper oder ein System verrichtet Arbeit).

Arbeit ist eine Form der Energieübertragung.

Energieformen der Mechanik
Unter der **potenziellen Energie** versteht man die Arbeitsfähigkeit aufgrund der Lage.
Potenzielle Energie eines Körpers in Erdnähe bezüglich eines Bezugsniveaus $h_0 = 0$

$$\boxed{E_{pot} = m \cdot g \cdot h}$$

Potenzielle Energie einer um s gegenüber der Ruhelage ausgelenkten Feder

$$\boxed{E_{Spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2}$$

Unter der **kinetischen Energie** versteht man die Arbeitsfähigkeit aufgrund der Geschwindigkeit.
Kinetische Energie eines Körpers mit der Geschwindigkeit v :

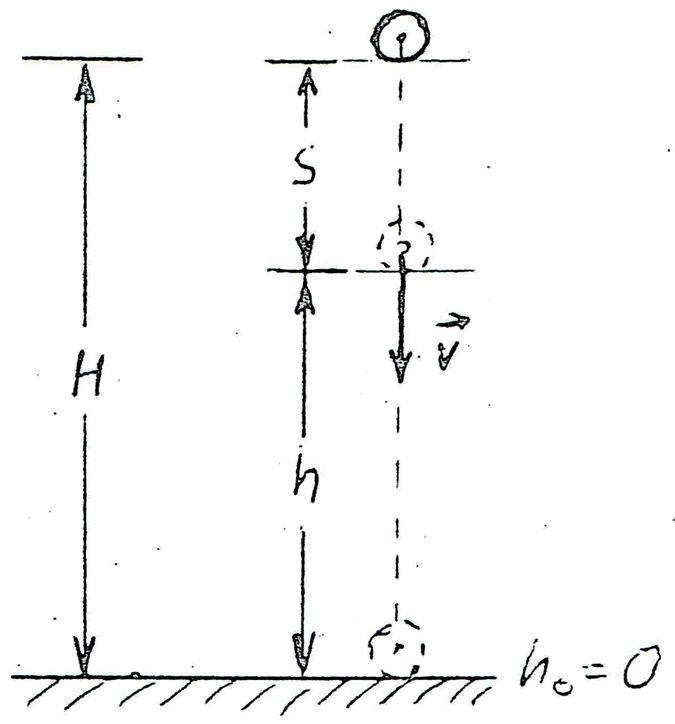
$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$$

Die Energieformen können ineinander umgewandelt werden.

Beispiele :

1. Energiebetrachtung beim freien Fall (Daten aus V. zum freien Fall)

Ein Körper der Masse m wird aus der Höhe H losgelassen. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Bestimmen Sie die potenzielle und die kinetische Energie, die der Körper während des Falls nach s = 200 cm , 400 cm , 500 cm , 600 cm hat !

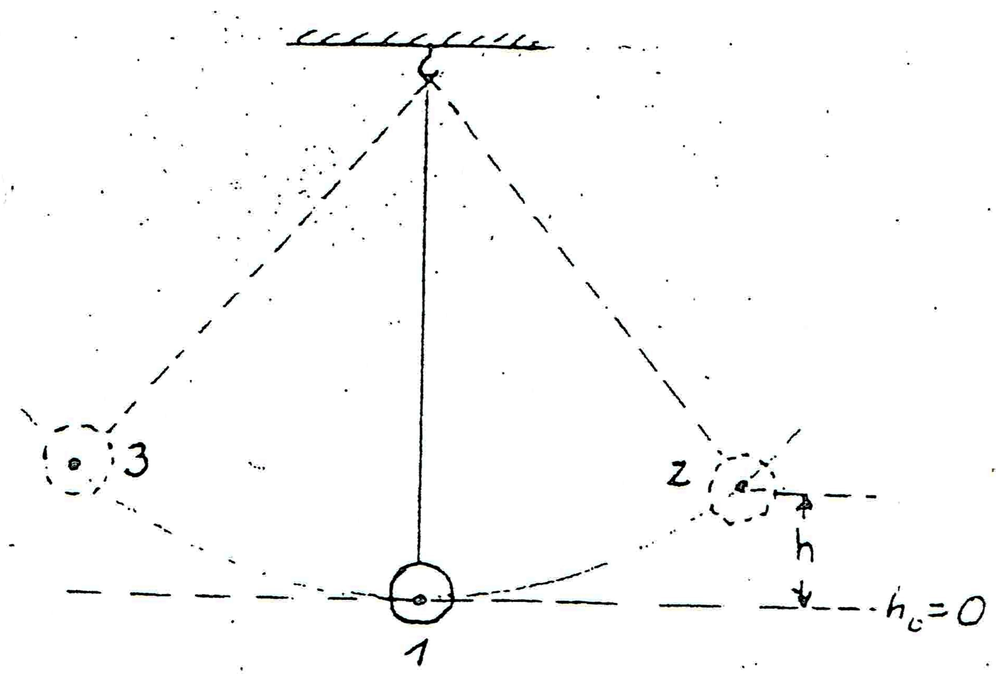


m = 28,3 g = 0,0283 kg
H = 1,00 m
h = H - s
v = g · t
E_{pot} = m · g · h
E_{kin} = 1/2 · m · v^2

h in m	1,00 m	0,800 m	0,600 m	0,500 m	0,400 m
t in s	–	0,205 s	0,289 s	0,323 s	0,353 s
v in m/s	–	2,01 m/s	2,84 m/s	3,17 m/s	3,46 m/s
E_{pot} in J	0,278 J	0,222 J	0,167 J	0,139 J	0,111 J
E_{kin} in J	–	0,057 J	0,114 J	0,142 J	0,170 J
E_{pot} + E_{kin} in J	0,278 J	0,279 J	0,281 J	0,281 J	0,281 J

Ergebnis : $E_{pot} + E_{kin} = Konst. = E_{ges}$

2. Energiebetrachtung bei der Bewegung eines Pendels



Wird das Pendel aus der Ruhelage 1 ausgelenkt, wird Hubarbeit verrichtet, es besitzt nun Höhenenergie. Lässt man es dort los, so schwingt es zunächst nach 1 zurück. Dabei wird es immer schneller, gewinnt also immer mehr kinetische Energie, während seine Höhenenergie immer mehr abnimmt. In 1 ist die gesamte Höhenenergie in kinetische Energie umgewandelt. Infolge der Trägheit schwingt das Pendel über 1 hinaus in die zu 2 symmetrische Lage 3 . Dabei wird es immer langsamer, verliert also wieder an kinetischer Energie, gewinnt aber wieder an Höhenenergie. In 3 ist die gesamte kinetische Energie wieder in die ursprüngliche Höhenenergie zurückverwandelt.

Energiesumme im tiefsten Punkt :

Energiesumme in den Umkehrpunkten :

4. Der Wikrungsgrad

Unter dem Wirkungsgrad η („Eta“) eines Energieumwandlungssystems, versteht man das Verhältniss der von dem System abgegebenen Arbeit zur der ihm zugefürten Arbeit.

$$\eta=\frac{W_{ab}}{W_{zu}} \quad \text{oder} \quad \eta=\frac{E_{ab}}{E_{zu}} \quad \text{oder} \quad \eta=\frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

Der Wirkungsgrad aller Systeme ist kleiner eins. „η > 1“