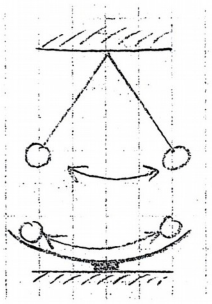
VIII. Mechanische Schwingungen

1. Überblick pber periodisch ableufende Bewegungsvorgänge

In Natur und Technik laufen viele Dinge periodisch ab, wobei sich die gleichen Zustände in gleichen Zeitabschnitten wiederholen. Dies sind die Schwingungen.

Man unterscheidet zwischen:

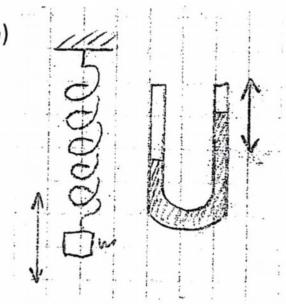
a)



Querschwingungen

(Transversalschwingungen)

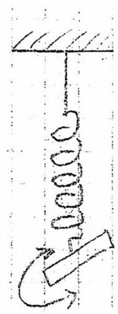
b)



Längsschwingungen

(Longitudinalschwingungen)

c)

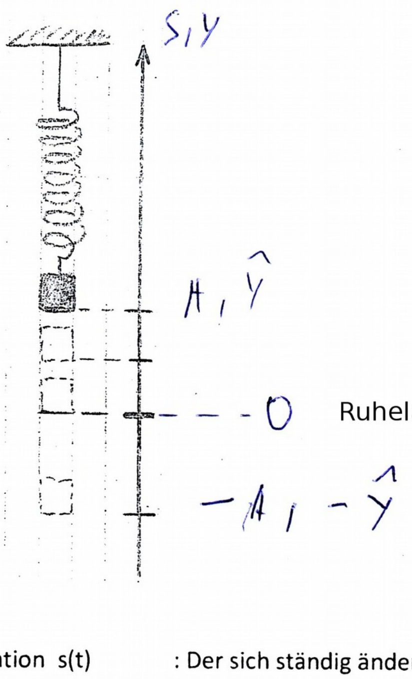


Torsionsschwin-

gungen

d) Kombinationen aus a), b) und c)

Kenngrößen einer Schwingung

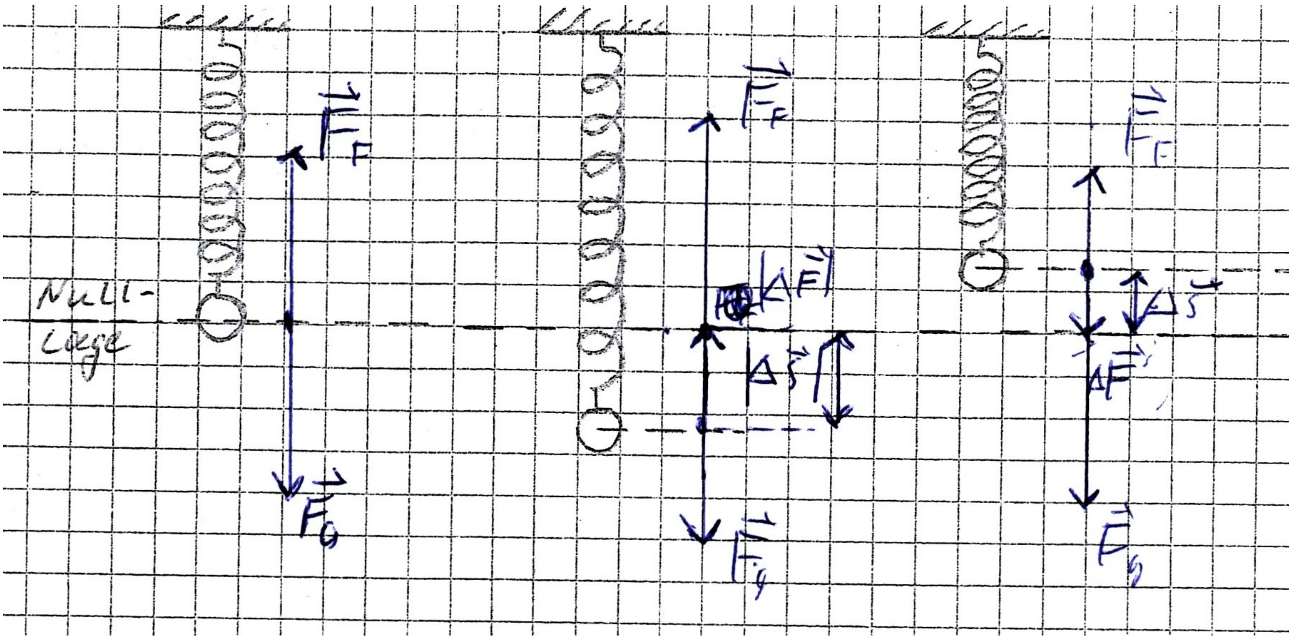


Ruhelage (Gleichgewichtslage)

Elongation $s(t)$	: Der sich ständig ändernde Abstand des schwingenden Körpers von der Ruhelage = momentane Auslenkung
Amplitude A	: Größter Ausschlag bei der Schwingung [$A = s(t)_{max}$]
Schwingungsdauer T	: Zeitdauer für einen vollen Hin- und Hergang
Frequenz f	: $f = 1 / T$
Kreisfrequenz ω	: $\omega = 2\pi / T = 2\pi f$

2. Harmonische Schingung

2.1 Kräftebetrachtung am Federpendel



$|\Delta\vec{F}| \quad |\Delta\vec{S}|$ $\qquad |\Delta\vec{F}| = D * |\Delta\vec{S}|$ $\qquad$ *Hokschegesetz*

⇒ **F(t) = - D*S(t)**

„**lineares Kraftgesetz**“ mit: D = Richtungsgröße besagt:

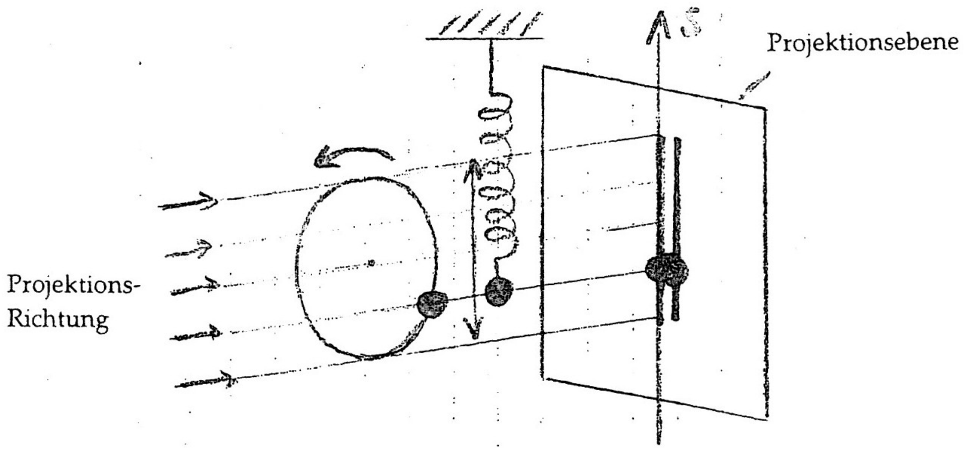
„dass F(t) und S(t) **entgegengerichtet** sind“

Merke:

Eine Schingung, bei der ein lineares Kraftgesetz gilt heist Harmonische Schingung

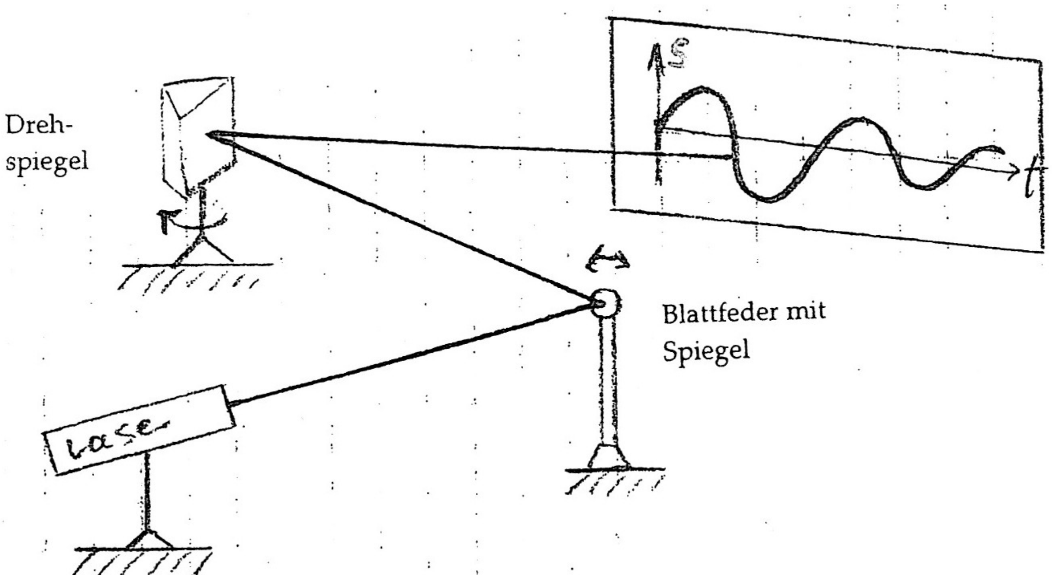
2.2 Zusammenhang zwischen Kreisbewegung und linearer Schwingung

<u>Versuch 1:</u> Parallelprojektion einer Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und einem Federpendel



Ist die Umlaufdauer des rotierenden Körpers gleich der Schwingungsdauer des Federpendels , so erscheinen die beiden Körper in der Projektion an der gleichen Stelle. Die Auslenkungen bzw. Elongationen sind daher in jedem Augenblick gleich.

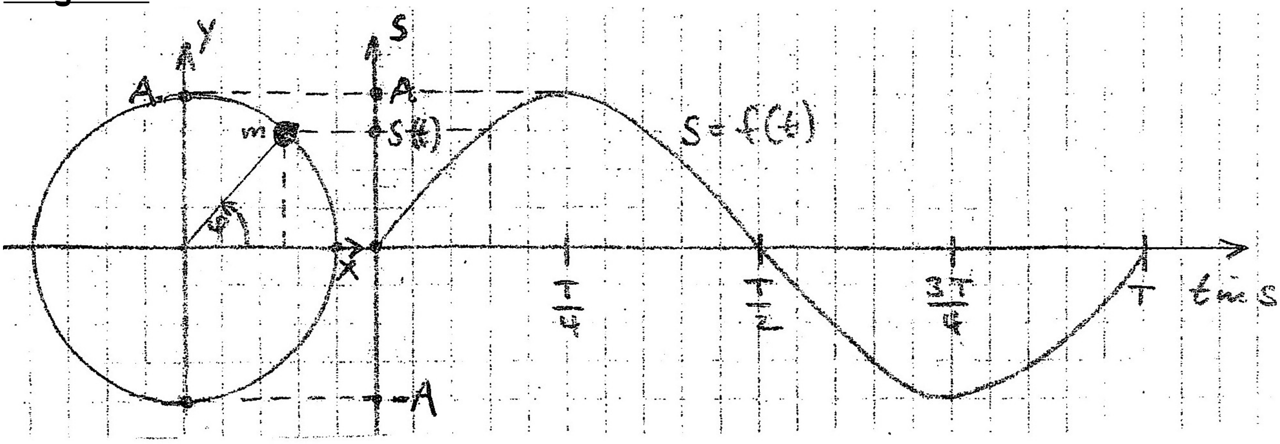
<u>Versuch 2:</u>



Zieht man die Blattpendelschwingung mit dem Drehspiegel auseinander, so erhält man die Sinuskurve als Bildkurve.

2.3 Zeit-Ort-Gesetz der harmonischen Schingung

Elogation



Es gilt: sin(φ)= s(t) over A
s(t) = A * sin(φ)

NR: $\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T}$; $\varphi = \frac{2\pi}{T} * t = \omega * t$

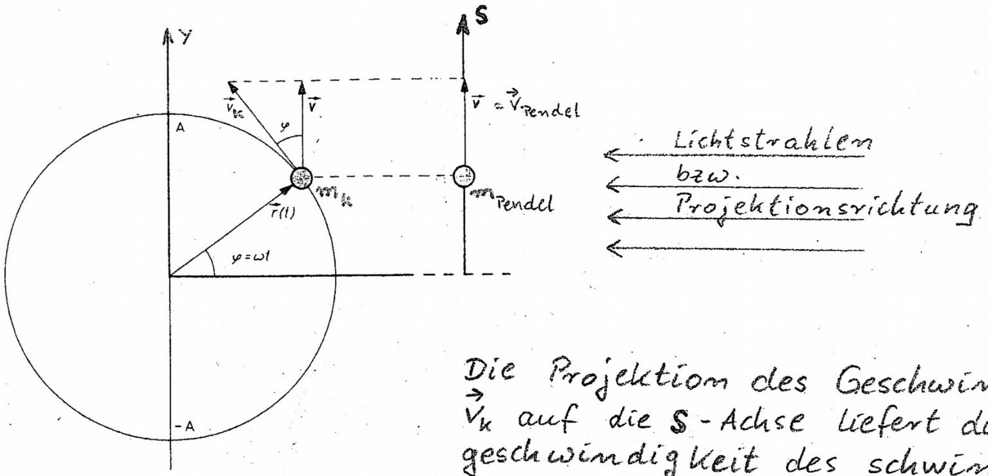
$\varphi = \omega * t = \text{Schwingungsphase}$

s(t) = A * sin (ω*t)

Ist **$\varphi \neq 0$** zur Zeit **t = 0** so gilt: $\boxed{\mathbf{s(t)=A*sin(\omega t + \varphi_0)}}$

Dieses Gesetz erlaubt es für jeden Zeitpunkt t die Elongation s von t zu berechnen.
S von t nimmt also periodisch positive und negative Werte an.

2.4 Zeit-Geschwindigkeit-Funktion der harmonischen Schingung



Die Projektion des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_K$ auf die S-Achse liefert die Momentangeschwindigkeit des schwingenden Körpers.

Es gilt: $v_{Pendel} = v(t)$

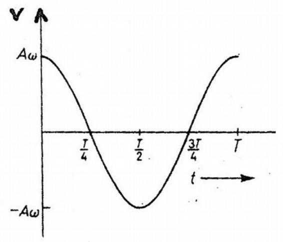
$v(t) = v_K \cdot \cos(\varphi) = v_K \cdot \cos(\omega t)$

mit $v_K = \frac{2\pi A}{T} = \omega \cdot A$

$\Rightarrow v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t)$

allg.: $\boxed{v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)}$

Zeit-Geschwindigkeits-Funktion der harmonischen Schwingung



für $\varphi_0 = 0$

v ist maximal beim Durchgang durch die Nullage

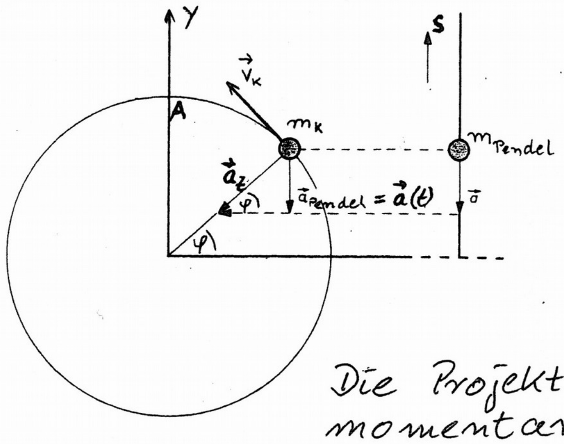
v ist 0 bei den Amplituden (Umkehrpunkten)

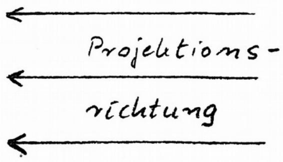
Einfache: $\boxed{s(t) = A * \sin(\omega * t + \varphi_0)}$

Herleitung: $\frac{d}{dt} s(t) = \acute{s}(t) = \omega * A * \cos(\omega * t + \varphi_0)$

<u>**Formel**</u>: $\boxed{v(t) = \omega * A * \cos(\omega t + \varphi_0)}$

2.5 Zeit-Beschleunigung-Funktion der harmonischen Schwingung





Die Schatten haben auch die gleiche Beschleunigung

Die Projektion von $\vec{a}_Z$ ergibt die momentane Beschleunigung $\vec{a} = \vec{a}(t)$ des Pendels

$$\sin(\varphi) = \frac{a(t)}{a_Z} \qquad \text{für } \varphi_0 = 0$$

mit $\varphi = \omega \cdot t$ und $a_Z = r \cdot \omega^2 = A \cdot \omega^2$

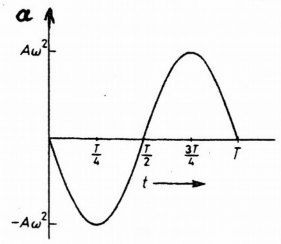
$$\Rightarrow \quad a(t) = A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

$a(t)$ zeigt immer in Richtung Gleichgewichtslage

$$\Rightarrow \quad a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

allg.: $\boxed{a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$ bzw.: $\underline{a(t) = -\omega^2 \cdot s(t)}$

Zeit-Beschleunigungsgesetz der harmonischen Schwingung



für $\varphi_0 = 0$

Die Momentanbeschleunigung ist immer auf die Ruhelage hin gerichtet („−"-Zeichen) und zur Elongation proportional. Wegen $\omega = 2\pi f$ wächst die Beschleunigung ausserdem mit f^2. Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage ist $a = 0$, in den Umkehrpunkten ist sie maximal.

Einfache: $\boxed{v(t) = \omega * A * \cos(\omega t + \varphi_0)}$

Herleitung: $a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = -\omega^2 A * (-\sin)(\omega * t + \varphi_0) = \omega^2 A * \sin(\omega * t + \varphi_0)$

Formel: $\boxed{a(t) = \omega^2 * A * \sin(\omega * t + \varphi_0)}$

2.6 Lineares Kraftgesetz

Bei einer Schwingung wirkt auf einen Körper der Masse m die Kraft :

$F = m \cdot a$ mit $a = a(t) = -\omega^2 \cdot s(t)$

⇨ $\boxed{F(t) = -m \cdot \omega^2 \cdot s(t)}$

$\boxed{F(t) = -D \cdot s(t)}$

Kraftgesetz der harmonischen Schwingung
mit D = Richtgröße und F(t) = Rückstellkraft

Definition : Bewegt sich ein Massenpunkt der Masse m auf einer Geraden und gilt in jedem Augenblick der Schwingung das lineare Kraftgesetz F(t) = - D · s(t) (bzw. F ~ s), so schwingt der Massenpunkt harmonisch.

Die Zeit – Weg – Gleichung der harmonischen Schwingung ist die Sinusfunktion.

Die Rückstellkraft $F_{Rück}(t) = -D \cdot s(t)$

$m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$

$m \cdot a(t) + D \cdot s(t) = 0$

bzw. $\boxed{m \cdot \ddot{s}(t) + s = 0}$

„Diggerentialgleichung der harmonischen schingung“

Herleitung der Schwingungsdauer

Merke: Die Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$ des harmonisch schwingenden Körpers bezeichnet man als seine Eigenfrequenz f_0.

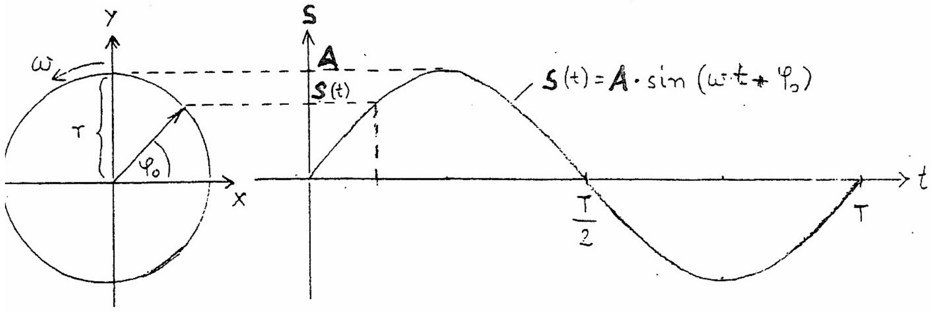
Herleitung:

I. D=m*ω²
II. ω = 2π/T
aus I: ω = sqrt{D over m} in II:

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2Pi}{T} \quad \text{und} \quad T = 2PI * \sqrt{\frac{m}{D}}$$

2.7 Zeiger- und Liniendiagramm

Jede harmonische Schwingung lässt sich als Projektion einer Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit darstellen.
Dabei ist die Amplitude der Schwingung gleich dem Radius der Kreisbahn.



Zeigerdiagramm Liniendiagramm

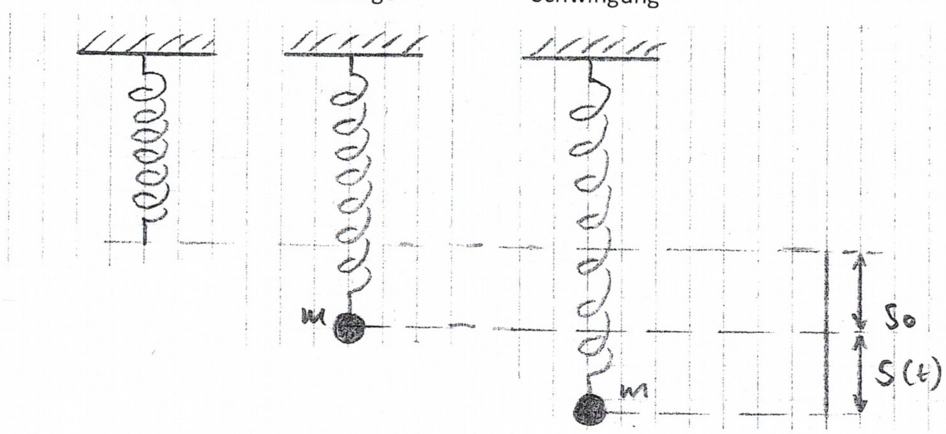
Jedem Schwingungszustand zum Zeitpunkt t kann in der x-y-Ebene ein Ortsvektor (Zeiger) zugeordnet werden.
r (Länge des Zeigers) = A ($\hat{Y}$)
φ_0 = Phasenwinkel zur Zeit t = 0 s

Das Zeigerdiagramm zeigt also eine Momentaufnahme der harmonischen Schwingung ; das Liniendiagramm der harmonischen Schwingung zeigt die zeitliche Abhängigkeit der Auslenkung für 0 s ≤ t ≤ T .

3. Überprüfung der Gültigkeit des linearen Kraftgesetzes an gegebenen Versuchsanordunugen

3.1 Das Federpendel

Unbelastet | statisch belastet = Ruhelage | während der Schwingung



Für die Gleichgewichtslage gilt, wenn das Hookesche Gesetz erfüllt ist , $m \cdot g = D \cdot r_0 \quad (*)$

Die Resultierende der auf den Körper wirkenden Kräfte wird nach unten positiv gerechnet und ergibt sich aus der nach oben gerichteten Federkraft und der nach unten wirkenden Gewichtskraft.

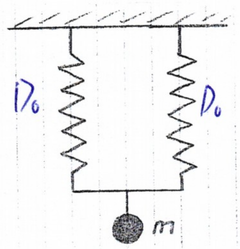
$$F_{Rück} = F(t) = -D \cdot (r_0 + r(t)) + m \cdot g$$
$$= -D \cdot s_0 - D \cdot r(t) + m \cdot g$$
$$\text{mit } (*) \quad F(t) = -m \cdot g - D \cdot r(t) + m \cdot g = -D \cdot r(t)$$

- ⇨ Die Schwingung ist harmonisch
- ⇨ Die Schwingungsdauer berechnet sich nach der Formel $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

→ Eigenfrequenz

<u>Einschub Kombination von Federn</u>

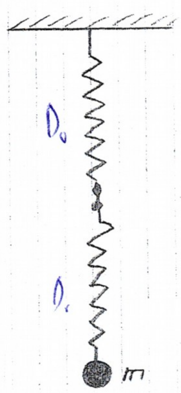
System I :



D_I = $2 \cdot D_0$, da bei gleicher Kraft (m · g) nur die 1/2 -fache Verlängerung auftritt. Allg.: $D = D_1 + D_2 + .. + D_n$

T_I = $2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{2D_0}}$ d.h. die Periodendauer Wird auf den $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -ten Teil reduziert

System II :



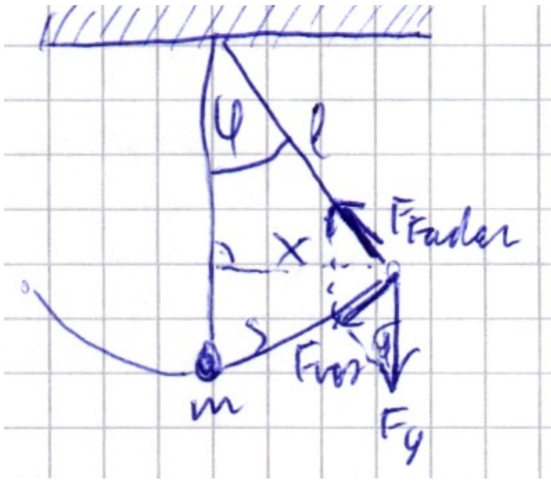
D_{II} = $\frac{1}{2} D_0$, da bei gleicher Kraft die Doppelte Verlängerung auftritt.

Allg.: $\frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$ ---

T_{II} = $2\pi \cdot \sqrt{\frac{2m}{D}}$

d.h. die Periodendauer wird auf das $\sqrt{2}$ -fache erhöht

3.2 das Fadenpendel



F = F(t) = F_g * sin(φ)
F = m * g * sin (φ)

F(t) und φ sind entgegengerichtet

⇒ **F(t) = - m * g * sin (φ)**
⇒ Für kleine Auslaufwinkel gilt : x = S

mit sin(φ) = x/l

⇒ **F(t) = - m * g * x / l**

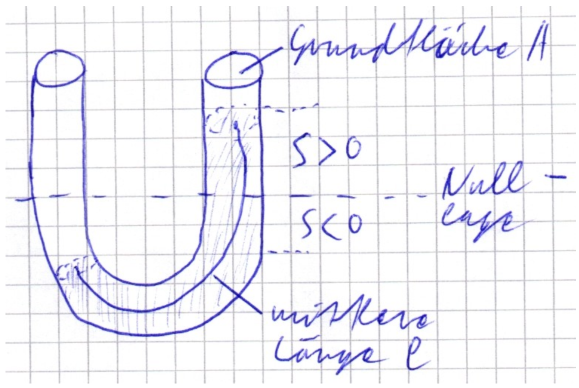
mit -m*g/l = Kons. = D

⇒ es gilt das lineare Kraftgesetz
⇒ harmonische Schwingung

Schwingungsdauer: $T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{\frac{m*g}{l}}}$

⇒ $\boxed{T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{g}}}$

3.3 Flüssigkeit im U-Rohr



Für die Rückstelkraft gilt:
$F_{Rück} = \Delta m * g = \rho * \Delta V * g = \rho * 2 s * A * g$

$F_{Rück}$ und Elogation sind entgegengerichtet
⇒ $F_{Rück} = -\underbrace{2 * \rho * A * g}_{D} * s$

$F_{Rück}$ = - D * s ⇒ lineares Kraftgesetz
⇒ harmonische Schw.

Schwingungsdauer: $T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{D}}$

mit $D = 2 * \rho * A * g$; mit $m = \rho * A * l$

$T = 2\pi * \sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi * \sqrt{\frac{\rho * A * l}{2 * \rho * A * g}}$ ⇒ $\boxed{T = 2\pi * \sqrt{\frac{l}{2} g}}$

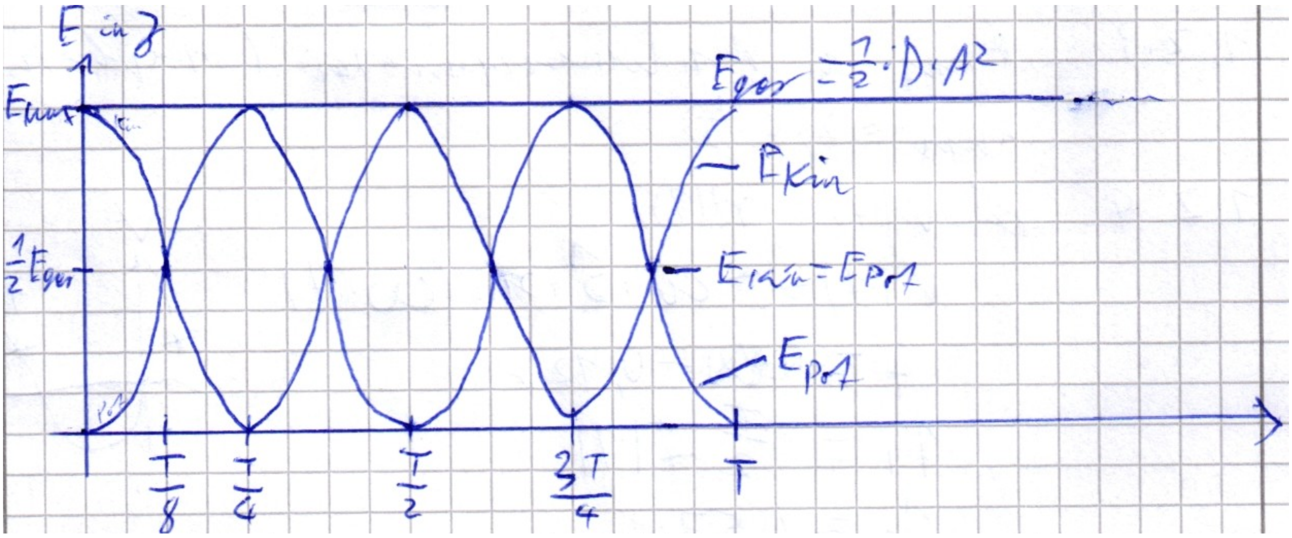
4. Schwingungsenergie

Wir betrachten ein Federpendel, zur Zeit t= = Durchgang durch die Gleichgewichtslage in Richtung positiver Elogation.
Für E_{ges} gitl $E_{ges} = E_{pot} + E_{kin}$

$$s(t) = A * \sin(\omega * t)$$
$$v(t) = A * w * \cos(\omega * t)$$
$$E_{Pot}(t) = \frac{1}{2} * D * [s(t)]^2 = \frac{1}{2} * D * A^2 * \sin^2(\omega * t)$$
$$E_{Kin}(t) = \frac{1}{2} * m * [V(t)]^2 = \frac{1}{2} * \omega^2 * A^2 * \cos^2(\omega * t)$$
$$E_{ges} = \frac{1}{2} * D * A^2 * \sin^2(\omega * t) + \frac{1}{2} * \omega^2 * A^2 * \cos^2(\omega * t)$$
$$\text{mit: } m * \omega^2 = D$$
$$E_{ges} = \frac{1}{2} * D * A^2 * [\sin^2(\omega * t) + \cos^2(\omega * t)] \quad \text{mit: } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_{ges} = \frac{1}{2} * D * A^2}$ gilt nur für ungedämpfte Schwingungen

t-E-Diagramm



Verlust von Schwingungsenergie durch Dämpfung

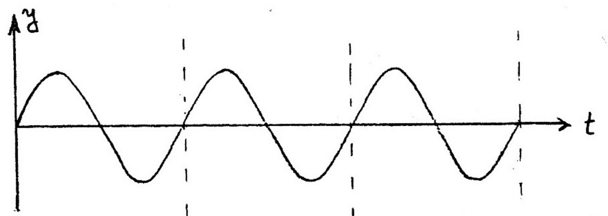
Mechanische Schwingungen sind fast immer gedämpft. Dies bedeutet eine Abnahme der Amplitude mit der Zeit. Dämpfung lässt sich zwar bei manchen schwingenden Systemen klein halten, ist aber nie ganz zu vermeiden.

Reibung und Luftwiderstand sind immer ~~sind immer~~ zur Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet
→ bremsen.
Kontinuierlich geordnete mechanische Energie wird in Energie der ungeordneten Teilchenbewegung umgewandelt → Temperaturerhöhung.

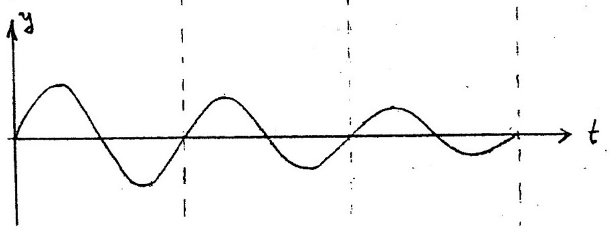
<u>Dämpfung heißt also Energieabgabe.</u>

Die an ungedämpften Schwingungen gewonnenen Ergebnisse können auf gedämpfte Schwingungen übertragen werden. Versuche haben ergeben, dass auch bei stärkerer Dämpfung, sofern die übrigen Bedingungen der Schwingung konstant gehalten werden, T praktisch unverändert bleibt.

Ungedämpfte Schwingung
Amplitude bleibt gleich



Gedämpfte Schwingung
Amplitude nimmt ab
Diese Schwingung ist nicht mehr harmonisch



Merke : Die unvermeidliche Reibung führt bei allen mechanischen Schwingungen zu einer allmählichen Abnahme der Amplitude und der Schwingungsenergie.

Die Dämpfung kann so groß sein, dass das System schon nach einer halben Schwingung in Ruhe ist
→ „aperiodische Dämpfung" .

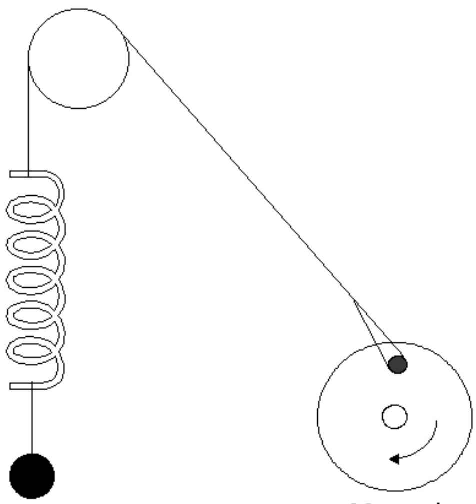
Um eine ungedämpfte Schwingung zu erhalten, muss immer im rechten Augenblick die notwendige Ersatzenergie dem System zugeführt werden (z.B. Schaukel, Uhr) . Unter der Einwirkung dieser <u>Selbststeuerung</u> oder <u>Rückkopplung</u> führt dann das System ungedämpfte Schwingungen aus.

5. Resonanz

Definition:
Ein **schwingungsfähigem System** wird, durch einen **Erreger** periodisch, **Schwingungsenergie** hinzugefügt. Wird dabei eine **maximale Amplitude hervorgerufen** spricht man von **Resonanz.**

Erzwungene Schwingung

- Das schwingende **System** ist an einen schwingenden **Erreger gekoppelt**
- Systeme sind meist **elastisch** Verbunden
- Der **Erreger** übt dabei **Kraft** aus
- Das **System schwingt** in der **gleichen Frequenz** des **Erregers**



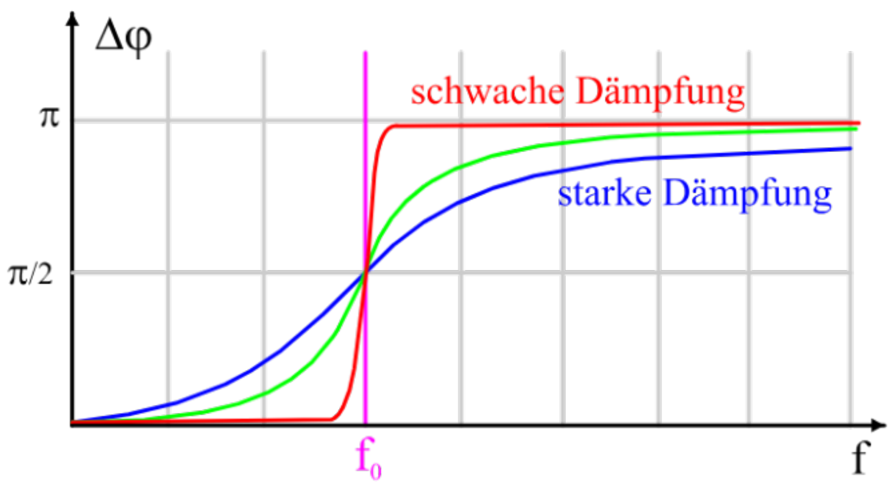
Phasendifferenz in Frequenzabhängigkeit

$f < f_0$
- annähend **gleiche Amplitude** von **Erreger** und **Schwinger** **($A_E \approx A_S$)**
- fast **keinen Phasenunterschied** **($\Delta\varphi \approx 0$)**

$f = f_0$
- **Amplitude** des **Schwingers** erreicht sein **Maximum** **($A_E < A_S$)**
- **Phasenverschiebung ist exakt:** $\boxed{\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}}$

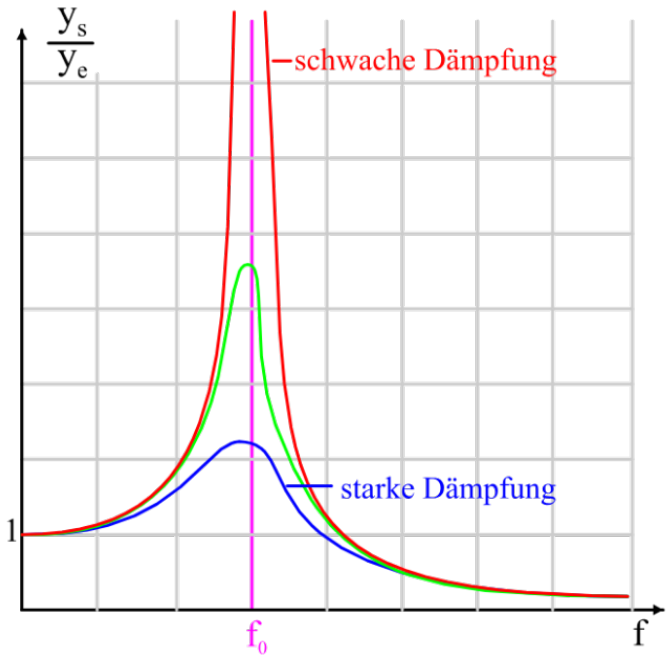
$f > f_0$
- Amplitude des Schwingers ist kleiner als die des Erregers **($A_E < A_S$)**
- **Phasenverschiebung** fast um eine **halbe Schwingung** **($\Delta\varphi \approx \pi$)**

*Wobei **f_0** der Eigenfrequenz des schwingenden Systems Entspricht.*



Resonanz mit & ohne Dämpfung

Bei **starker Dämpfung** wird die hinzugefügte **Schwingungsenergie** gleich wieder in andere Energien umgewandelt, z.B. Reibungswärme.
Die **Amplitude** bleibt dabei verhältnismäßig **klein**.

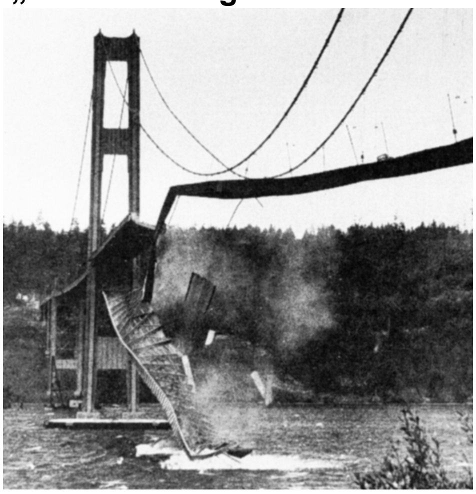


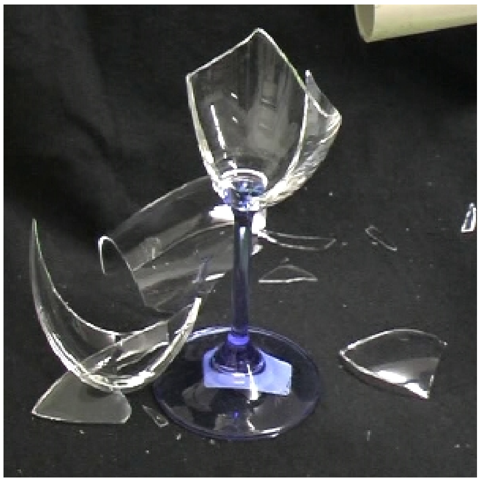
Bei einer schwächer Dämpfung baut sich die Schwingungsenergie immer weiter auf. Solange bis die Dämpfungsenergie gleichgroß ist und das System in einem gleichbleibenden System endet.

Bei einer zu schwachen Dämpfung kann es zur **Resonanzkatastrophe** kommen. Dabei bekommt das System soviel Energie, dass es diesem nicht mehr standhalten kann. Es gerät **aus seinem Schwingungsbereich**.

Resonanzkatastrophen:

„Tacoma Bridge“:





„Zersprungenes Weinglas“

Anwendungsbereiche

- **Funk**
- **Verstärkerschaltungen**
- **Musikinstrumente**

...