<u>Kurvendiskussion e-Funktion</u>
<u>Angelehnt an AP 1993 AI</u>

1 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = (3 - x)e^{\frac{1}{3}x}, \mathbb{D} = \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

1.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von f und geben Sie die Koordinaten und Art des Extrempunktes an.

1.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von f und geben Sie die Koordinaten des Wendpunktes an. Ermitteln Sie eine Gleichung der Wendetangente des Graphen von f.

1.5 Zeigen oder widerlegen Sie: die Wendetangente und die in der Nullstelle angelegte Tangente an den Graphen von f stehen senkrecht aufeinander.

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von f für $-9 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Zeichnen Sie auch die Wendetangente ein.

2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F: x \to (18 - 3x)e^{\frac{1}{3}x}, \mathbb{D} = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

2.2 Bestimmen Sie ohne weitere Rechnung aus dem Verlauf des Graphen von f aus Teilaufgabe 1.6 das Monotonieverhalten von der Funktion von F.

2.3 Der Graph von f, seine Wendetangente und die x-Achse begrenzen im I. und II. Quadranten ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.

3 Die Gerade $x = u, u \in \mathbb{R} \land u < 3$ schneidet den Graphen von f im Punkt P und die x-Achse im Punkt Q. Die Punkte P und Q bilden zusammen mit dem Punkt N(3/0) das Dreieck PQN.

3.1 Zeichnen Sie das Dreieck PQN für den Sonderfall $x = -1$ in das unter 1.6 angelegte Koordinatensystem.

3.2 Berechnen Sie die Maßzahl A(u) des Dreiecks PQN in Abhängigkeit von u.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis:} A(u) = \left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right) \cdot e^{\frac{1}{3}u}\right]$

3.3 Berechnen Sie $\lim\limits_{u \to 3^-} A(u)$ und unter Verwendung der Regel von l´Hospital $\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$.

3.4 Ermitteln Sie für welches $u \in \mathbb{R} \land u < 3$ die Flächenmaßzahl ihren absolut größten Wert annimmt, und berechnen Sie diesen größten Wert.

Lösungsvorschlag

1.1 $f(0)=(3-0)e^{\frac{1}{3}\cdot 0}=3 \quad \Rightarrow \quad S_y(0;3)$

$(3-x)e^{\frac{1}{3}x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3=x \quad \Rightarrow \quad S_x(3;0)$

1.2

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{(3-x)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\frac{1}{3}x}}_{\to\infty}=-\infty;\ \lim_{x\to-\infty}\underbrace{(3-x)}_{\to\infty}\underbrace{e^{\frac{1}{3}x}}_{\to 0}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{(3-x)}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{-\frac{1}{3}x}}_{\to\infty}}\ \overline{\overline{l'H}}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\underbrace{-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}}_{\to-\infty}}=0^{+}$$

1.3 $f'(x)=-e^{\frac{1}{3}x}+(3-x)e^{\frac{1}{3}x}\cdot\frac{1}{3}=-e^{\frac{1}{3}x}+e^{\frac{1}{3}x}-\frac{1}{3}xe^{\frac{1}{3}x}=-\frac{1}{3}xe^{\frac{1}{3}x}$

		0
x	$-$	$+$
$e^{\frac{1}{3}\cdot x}$	$+$	$+$
$-\frac{1}{3}$	$-$	$-$
	$+$	$-$

G_f ist für $x\in]-\infty;0]$ sms

G_f ist für $x\in[0;+\infty[$ smf $\quad \Rightarrow \quad$ rel. HOP$(0;3)$

1.4 $f''(x)=-\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}+\left(-\frac{1}{3}\right)xe^{\frac{1}{3}x}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{9}\cdot(x+3)e^{\frac{1}{3}x}$

		-3
$(x+3)$	$-$	$+$
$e^{\frac{1}{3}\cdot x}$	$+$	$+$
$-\frac{1}{9}$	$-$	$-$
	$+$	$-$

G_f ist für $x\in]-\infty;-3]$ lgk

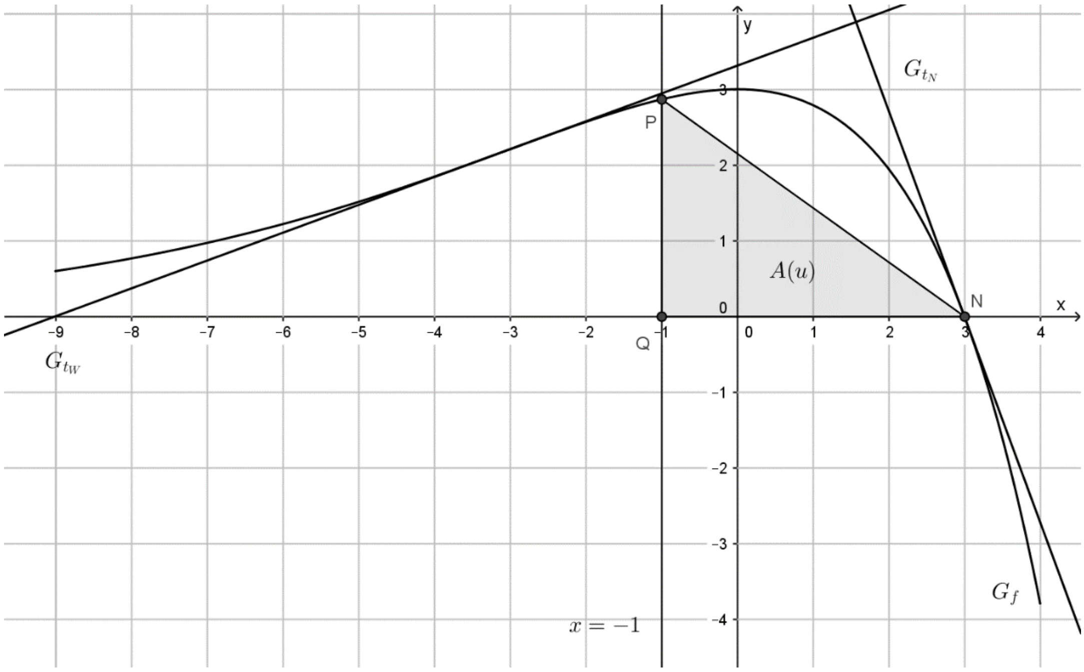
G_f ist für $x\in[-3;+\infty[$ rgk $\quad \Rightarrow \quad WP\left(-3;\frac{6}{e}\right)$

$t_W(x)=f'(-3)\big(x-(-3)\big)+f(-3)=\frac{1}{e}(x+3)+\frac{6}{e}=\frac{1}{e}x+\frac{9}{e}$

1.5 $t_N(x)=f'(3)(x-3)+f(3)=-e(x-3)+0=-ex+3e$

$m_{t_W}\cdot m_{t_N}=\frac{1}{e}\cdot(-e)=-1 \quad \Rightarrow \quad G_{t_W}\perp G_{t_N}$

1.6 + 3.1



2.1 $F'(x) = -3e^{\frac{1}{3}x} + (18-3x)e^{\frac{1}{3}x} \cdot \frac{1}{3} = -3e^{\frac{1}{3}x} + 6e^{\frac{1}{3}x} - xe^{\frac{1}{3}x} =$
$3e^{\frac{1}{3}x} - xe^{\frac{1}{3}x} = (3-x)e^{\frac{1}{3}x} = f(x)$

2.2 G_F ist für $x \in]-\infty; 3]$ sms, da $f(x) > 0$ und $f(3) = 0$
G_F ist für $x \in [3; \infty[$ smf, da $f(x) < 0$ und $f(3) = 0$

2.3

$$\left.\begin{array}{r} A_f = \int_{-3}^{3}(3-x)e^{\frac{1}{3}x}\,dx = \left[(18-3x)e^{\frac{1}{3}x}\right]_{-3}^{3} = 9e - \frac{27}{e} \\ A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left(-3-(-9)\right)\cdot\frac{6}{e} = \frac{18}{e} \end{array}\right\} A_{ges} = A_f + A_\Delta = 9e - \frac{27}{e} + \frac{18}{e} = 9e - \frac{9}{e}$$

3.2 $A(u) = \frac{1}{2}\cdot(3-u)f(u) = \frac{1}{2}(3-u)\cdot(3-u)e^{\frac{1}{3}u} = \left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{3}u}$

3.3

$$\lim_{x\to 3}\underbrace{\left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{3}u}}_{\to e} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{3}u}}_{\to 0} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right)}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{-\frac{1}{3}u}}_{\to\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{u-3}^{\to\infty}}{\underbrace{-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}u}}_{\to-\infty}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}u}}_{\to\infty}} = 0^+$$

3.4 $A'(u) = (u-3)e^{\frac{1}{3}u} + \left(\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{3}u}\cdot\frac{1}{3} =$

$(u-3)e^{\frac{1}{3}u} + \frac{1}{6}(u-3)^2 e^{\frac{1}{3}u} =$

$(u-3)e^{\frac{1}{3}u}\left(1 + \frac{1}{6}(u-3)\right) =$

$(u-3)e^{\frac{1}{3}u} \cdot \left(\frac{1}{6}u + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}(u-3)(u+3)e^{\frac{1}{3}u}$

Für $u = -3$ nimmt $A(u)$
den absolut größten Wert an.
$A(-3) = \frac{1}{2}(-3-3)^2 e^{\frac{1}{3}\cdot(-3)} = 18e^{-1} = \frac{18}{e}$

		-3		3	
$(u+3)$	$-$		$+$		
$(u-3)$	$-$		$-$		
$e^{\frac{1}{3}\cdot u}$	$+$		$+$		
$\frac{1}{6}$	$+$		$+$		
	$+$		$-$		
	/		\		